Invarianz und Kovarianz

Wolfgang Lange

15. Februar 2016

"Die allgemeinen Naturgesetze sind durch Gleichungen auszudrücken, die für alle Koordinatensysteme gelten, d.h. die beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant (allgemein kovariant) sind."
Albert Einstein 1916

1 Invarianz, Kovarianz, Forminvarianz

In der Literatur über die spezielle Relativitiätstheorie erscheint häufig der Begriff *kovariante Darstellung der Maxwellschen Gleichungen*. Man macht sich gewöhnlich nicht die Mühe, die Kovarianz zu hinterfragen. Im Brockhaus Physik [4] wird man auf Invarianz verwiesen, und dort heißt es:

> "*Invarianz,* Unveränderlichkeit von physikalischen oder mathematischen Größen bzw. Eigenschaften gegenüber bestimmten Operationen, Abbildungen bzw. Transformationen. Für die Physik ist die I. bestimmter Größen, der *Invarianten*, von besonderer Bedeutung, die den Erzeugenden derjenigen Transformationsgruppen zugeordnet sind, die den Symmetrien der Naturgesetze, d.h. zur Kovarianz der entsprechenden Gleichungen führen. Dabei versteht man unter *Kovarianz* im Gegensatz zur I. die Unveränderlichkeit der Form der Gleichungen bei einer Transformation der eingehenden Variablen, d.h. Kovarianz ist *Forminvarianz* (→Symmetrie). Für wichtige stetige Gruppen, z.B. der Drehgruppe oder der Poincaré-Gruppe, sind die Invarianten durch bestimmte, für jede Gruppe konstante Operatoren, die Casimir-Operatoren, gegeben (→Liesche Gruppe); Invariante der Poincaré-Gruppe sind z.B. die Gesamtenergie, der Spin, und die Helizität. Mit den Invarianten der universellen Symmetrietransformationen der Materie sind globale →Erhaltungssätze verbunden (→CPT-Theorem)."

Damit ist oft nicht nur der normale Leser überfordert, und das machen sich etablierte Physiker zunutze.

Für mich ist das berühmte Beispiel Hermann Minkowski [8, 7]. Nach der Lektüre seines Vortrages "Raum und Zeit" habe ich ihn umgehend als Einsteinianer eingestuft, und dann das Vorwort der Grundgleichungen nur überflogen. Erst viel später fiel mir der Begriff *Kovarianz* auf, der nach dem obigen Zitat alles im wahrsten Sinne des Wortes *relativiert*. Aufklärung fand ich erst bei Richard Feynman [2], obwohl er den Begriff nicht verwendete.

2 Was sind Invarianz und Kovarianz

Wir gehen auf den ersten Satz des Brockhauszitates zurück

> *Invarianz,* Unveränderlichkeit von physikalischen oder mathematischen Größen bzw. Eigenschaften gegenüber bestimmten Operationen, Abbildungen bzw. Transformationen.

Der Satz führt bereits in die Irre. Eine Transformation hat nur Sinn, wenn man Größen oder Eigenschaften verändern will. Mit einem elektromagnetischen Transformator werden Spannungen und Ströme transformiert, sie sind nicht mehr invariant. Das gilt genauso für Drehzahlen und Momente an Getrieben. Jedoch ist bis auf unvermeidliche Verluste bei technischen Transformationen z.B. die übertragenen Leistung auf beiden Seiten des sogenannten Vierpols gleich. Diese Produkte sind invariant, obwohl sich die Komponenten ändern.

Kovariante Gleichungen haben trotz der Substitutionen ähnliches Aussehen, aber man muss auf der Hut sein, keine Fehlinterpretationen zu begehen, wie es in der speziellen Relativitätstheorie der Fall ist. Beispielsweise hat H. A. Lorentz [6] mittels einer linearen Transformation die partielle Ableitung nach der Zeit transformiert und für einen speziellen Fall Teile dieser Ableitung den räumlichen Ableitungen zugeschlagen. Die Gleichung blieb kovariant, aber die Komponenten haben sich verändert, und er wie auch andere wunderten sich, dass diese Gleichung nach einem Ellipsoid aussah, den es definitiv nicht geben kann, weil diese mathematischen Operationen im geometrischen Sinne kovariant (forminvariant) bleiben müssen. Eine Kugel bleibt bei linearen Transformationen eine Kugel, wenn nicht durch Tricks irgendwo Berge oder Täler hinzugefügt werden. Anders ist es bei nichtlinearen Transformationen, z.B. bei der Abbildung eines Berges auf einem ebenen Blatt Papier. In solchen Fällen helfen sich Techniker mit meistens rechtwinkligen Schnittzeichnungen und anschließender "mechanischer" Integration mittels Kurvenlinealen. Im Schiffs- und Flugzeugbau geschah das auf dem Schnürboden mit Hilfe von Spantenrissen und Straklatten.

3 Mathematische Invarianzen

In der Mathematik sind zur Lösung von Gleichungen einfache Substitutionen üblich.

Addition einer Nulldifferenz Die erste Methode ist das Hinzufügen eines Nullwertes, z.B. eine quadratische Ergänzung auf beiden Seiten einer quadratischen Gleichung. Als Studenten nannten wir es ein *nahrhafte Null.* Die einfachste derartige Substitution ist die Erzeugung neuer Variablen

$$a + b = a + (c - c) + b = (a + c) + (b - c) = a' + b', \tag{3.1}$$

$$a' = a + c, \qquad b' = b - c. \tag{3.2}$$

Bei einer quadratischen Gleichung hilft man sich z.B. durch Addition auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens

$$x^2 + xp - q = 0, \tag{3.3}$$

$$x^2 + 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q, \tag{3.4}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q, \tag{3.5}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{3.6}$$

Multiplikation mit Eins Ein Produkt kann mit einem Faktor Eins multipliziert werden

$$A \cdot B = A \cdot \frac{C}{C} \cdot B = (A \cdot C) \cdot \left(\frac{B}{C}\right) = A' \cdot B', \tag{3.7}$$

$$A' = A \cdot C, \qquad B' = \frac{B}{C}. \tag{3.8}$$

Als Beispiel dient hier die Balkenwaage mit gleichem Drehmoment auf beiden Seiten

$$F \cdot l = F' \cdot l' = \left(\frac{F}{C}\right) \cdot (l \cdot C)\,. \tag{3.9}$$

Einfügen einer Einheitsmatrix Zwischen den Zeilen- und Spaltenvektor eines skalaren Produktes wird eine Einheitsmatrix als Produkt zweier zueinander inverser Transformationsmatrizen eingefügt

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \left(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda\right) \cdot \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^T \cdot \Lambda^{-1}\right) \cdot (\Lambda \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{y}', \tag{3.10}$$

$$\mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T \cdot \Lambda^{-1}, \qquad \mathbf{x}' = \left(\Lambda^{-1}\right)^T \cdot \mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}' = \Lambda \cdot \mathbf{y}. \tag{3.11}$$

Mit dieser Methode hat Lorentz [5, 6] das partielle Differential der Ortszeit gebildet. Darauf beruht u.a. die Invarianz des vollständigen Differentials bei Marcel Grossmann [3] und David Hilbert [9].

Die vollständige Ableitung einer Funktion $f\left[x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),t\right]$ ist

$$\frac{df}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\\ \frac{dt}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Lorentz fügte hier die Galilei-Transformation ein

$$\frac{df}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -p_x\\ 0 & 1 & 0 & -p_y\\ 0 & 0 & 1 & -p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & p_x\\ 0 & 1 & 0 & p_y\\ 0 & 0 & 1 & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\\ 1\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

und berechnete die Einzeltransformationen

$$\frac{df}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & -p_x\frac{\partial f}{\partial x}-p_y\frac{\partial f}{\partial y}-p_z\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x+p_x\\ v_y+p_y\\ v_z+p_z\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Daher kommen seine Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial\left(x\right)}=\frac{\partial}{\partial x},\qquad\frac{\partial}{\partial\left(y\right)}=\frac{\partial}{\partial y},\qquad\frac{\partial}{\partial\left(z\right)}=\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.15}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2=-p_x\frac{\partial}{\partial x}-p_y\frac{\partial}{\partial y}-p_z\frac{\partial}{\partial z}+\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1. \tag{3.16}$$

Einfügen eines Kronecker-Symbols In der vorigen Variante wird die Einheitsmatrix im Tensorkalkül durch das Kronecker-Symbol ersetzt. Dieses Verfahren erscheint bei Einstein [1] § 5 Kontravarianter und kovarianter Vierervektor

$$A_\nu\cdot B^\nu=A'_\sigma\cdot B'^\sigma=\text{invariant}, \tag{3.17}$$

$$A'_\sigma=\sum_\nu A_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma},\qquad B'^\sigma=\sum_\nu\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}B^\nu. \tag{3.18}$$

Kontragrediente Transformationen Alle diese Beispiele sind *kontragrediente* Transformationen mit *invarianten* Ergebnissen. Kontragredient ist ein Begriff aus der Matrizenrechnung. Da Zeilen- und Spaltenvektoren zueinander transponiert sind, ergeben sich wie bei der Einheitsmatrix die beiden Transformationen

$$\mathbf{x}'=\left(\Lambda^{-1}\right)^T\cdot\mathbf{x},\qquad\mathbf{y}'=\Lambda\cdot\mathbf{y} \tag{3.19}$$

oder

$$\mathbf{x}'^T=\mathbf{x}^T\cdot\Lambda^{-1},\qquad\mathbf{y}'^T=\mathbf{y}\cdot\Lambda^T, \tag{3.20}$$

d.h. die Matrizen Λ^{-1} und Λ^T sind kontragredient zueinander. Dennoch bleibt der invariante Charakter der Gleichungen erhalten, und in der speziellen Relativitätstheorie bleibt eine Kugel eine Kugel und ein Kreis ein Kreis. Wer etwas Anderes lehrt, versteht sein Fach nicht oder betrügt seine Studenten. Es gibt keine Längenkontraktion oder Zeitdilatation. Das sind alles nur durch mathematische Manipulation erzeugte Größen. Bei der Waage bleiben 2 g Gold nur zwei Gramm Gold, gleichgültig wie lang die Hebelarme der Waage sind. Ähnlich geht es auch bei der gekrümmten Welt des Herrn Einstein zu, denn alle Gravitiationsfelder sind Potentialfelder mit geschlossenen Äquipotentialflächen.

Literatur

[1] Einstein, A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Annalen der Physik, 49:769–822, 1916.

[2] Feynman, Richard P.: *Vorlesungen über Physik II.* Oldenbourg, 3. Ausgabe Auflage, 2001.

[3] Grossmann, M.: *Mathematische Begriffsbildungen zur Gravitationstheorie.* Internet, Seite 7, 1913.

[4] Lenk, R. (Herausgeber): *ABC Brockhaus Physik.* F.A.Brockhaus Leipzig, 1989.

[5] Lorentz, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvmants.* E. J. BRILL, 1892.

[6] Lorentz, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005).

[7] Minkowski, Hermann: *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.* Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss., 1907.

[8] Minkowski, Hermann: *Raum und Zeit*, 1909.

[9] Sauer, T. u.a.: *David Hilber's Lectures on the Foundations of Physics 1915-1927.* Springer, 2009.