Über den Fundamentaltensor in der ART

Wolfgang Lange

22. November 2014

1 Einleitung

Der vorliegende Artikel ist ein Teil der Analyse von "B. Mathematischen Hilfsmittel ..." nach Einstein [2].

2 B. Mathematische Hilfsmittel für die Aufstellung allgemein kovarianter Gleichungen

2.1 Über § 8. Einiges über den Fundamentaltensor der $g_{\mu\nu}$.

2.1.1 Zitat

Der kovariante Fundamentaltensor.
In dem invarianten Ausdruck des Quadrates des Linienelementes

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

spielt dx_μ die Rolle eines beliebig wählbaren kontravarianten Vektors. Da ferner $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, so folgt nach den Betrachtungen des letzten Paragraphen hieraus, daß $g_{\mu\nu}$ ein kovarianter Tensor zweiten Ranges ist. Wir nennen ihn „Fundamentaltensor". Im folgenden leiten wir einige Eigenschaften dieses Tensors ab, die zwar jedem Tensor zweiten Ranges eigen sind; aber die besondere Rolle des Fundamentaltensors in unserer Theorie, welche in der Besonderheit der Gravitationswirkungen ihren physikalischen Grund hat, bringt es mit sich, daß die zu entwickelnden Relationen nur bei dem Fundamentaltensor für uns von Bedeutung sind.

2.1.2 Kommentar

Wenn dx_μ ein kontravarianten Vektor sein soll, und diese Vektoren mit oberen Indizes belegt werden sollen, dann müsste es heißen

$$ds^2 = dx_\nu g^\nu_\mu dx^\mu. \tag{2.1.1}$$

Unter *dem invarianten Ausdruck des Quadrates des Linienelementes* ds^2 ist eine Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen gemeint. Zwei Ereignisse P_1und P_2 erfüllen die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2 t^2 \tag{2.1.2}$$

und

$$(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 = (r + dr)^2 = c^2 (t + dt)^2 , \tag{2.1.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} & x^2 & + & y^2 & + & z^2 & + \\ + & 2xdx & + & 2ydy & + & 2zdz & + \\ + & dx^2 & + & dy^2 & + & dz^2 & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} & r^2 & + \\ + & 2rdr & + \\ + & dr^2 & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} & c^2t^2 & + \\ + & c^2 2tdt & + \\ + & c^2 dt^2 & \end{array} \right\}. \tag{2.1.4}$$

Die Differenz ist

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} & 2xdx & + & 2ydy & + & 2zdz & + \\ + & dx^2 & + & dy^2 & + & dz^2 & \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc} & 2rdr & + \\ + & dr^2 & \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ccc} & c^2 2tdt & + \\ + & c^2 dt^2 & \end{array}\right\}, \tag{2.1.5}$$

und nach dem Ansatz für ds^2

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dr^2 = ds^2 = 2\left(rdr - xdx - ydx - zdz\right). \tag{2.1.6}$$

Für den Punkt P_2 ist bei der Lage auf der Kugeloberfläche $dr = 0$, und unsere Anfangsgleichung geht über in

$$(x + dx)^2 + (y + dy)^2 + (z + dz)^2 = r^2 = c^2 t^2, \tag{2.1.7}$$

und es ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = -2\left(xdx + ydx + zdz\right). \tag{2.1.8}$$

Das versteht Minkowski [3] mit $dr = 0$ unter *lichtartig.* Ist jedoch $dr \neq 0$, wird Der Punkt P_2 kann sich nicht translatorisch bewegen; er muss eine Rotation um den Kugelmittelpunkt ausführen.
Die Matrizengleichungen für ein kugelförmiges Feld sind

$$\mathbf{x}^T G \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = 0, \tag{2.1.9}$$

$$(\mathbf{x} + d\mathbf{x})^T G\left(\mathbf{x} + d\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} x + dx, & y + dy, & z + dz, & ct + cdt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + zdz \\ ct + cdt \end{pmatrix} = 0,$$

$$d\mathbf{x}^T G d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx & dy & dz & cdt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ cdt \end{pmatrix} = ds^2. \tag{2.1.10}$$

Die letzten Gleichungen beschreiben zwei um dx, dy, dz, dt auseinanderliegende Ereignisse (wo und wann) im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum.
Die Zeit dt steht nicht senkrecht auf den dx, dy, dz, weil sie beim Fortschreiten auf einer Kurve wie ds als Parameter erscheint.
Die quadratische Form

$$\begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{2.1.11}$$

beschreibt eine zweidimensionale Kugeloberfläche im drei dimensionalen Raum, und mit dem Tensor g_μ^ν (der Matrix G)

$$G = \begin{pmatrix} a & e & f & h \\ e & b & g & i \\ f & g & c & j \\ h & i & j & d \end{pmatrix} \tag{2.1.12}$$

erhält man eine Fläche zweiter Ordnung, eine Kugel, einen Ellipsoid, einen Hyperboloid oder einen Paraboloid. Andere Oberflächen sind nicht möglich, wobei ein Doppel-Kegel ein entarteter Hyperboloid ist. Ändern sich aber auch die Elemente des Tensors in der Umgebung des Punktes $x, y, z, r = ct$, kommt es zu Verformungen der ehemals glatten Flächen zweiter Ordnung. Dann wären die a bis j Funktionen eines oder mehrerer Parameter. Der Tensor hätte dann statt der zehn Parameter jetzt zehn konstante und zehn ortsabhängige. Die Oberfläche bliebe jedoch zweidimensional mit räumlichen Verzerrungen als Berge und Täler. Ist man in der Lage, diese Funktionen mit stetigen Differentialquotienten zu versehen, ließen sich unendlich viele zweidimensionale Gebirgsoberflächen darstellen.
Wegen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ist der Fundamentaltensor symmetrisch.

2.1.3 Zitat

Der kontravariante Fundamentaltensor.

Bildet man in dem Determinantenschema der $g_{\mu\nu}$ zu jedem $g_{\mu\nu}$ die Unterdeterminante und dividiert diese durch die Determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ der $g_{\mu\nu}$, so erhält man gewisse Größen $g_{\mu\nu} (= g_{\nu\mu})$, von denen wir beweisen wollen, daß sie einen kontravarianten Tensor bilden.

Nach einem bekannten Determinantensatze ist

$$(16) \qquad g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^{\ \nu},$$

wobei das Zeichen $\delta_\mu^{\ \nu}$ 1 oder 0 bedeutet, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Statt des obigen Ausdruckes für ds^2 können wir auch

$$g_{\mu\sigma} \delta_\mu^{\ \nu} dx_\mu dx_\nu,$$

oder nach (16) auch

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} dx_\mu dx_\nu$$

schreiben. Nun bilden aber nach den Multiplikationsregeln des vorigen Paragraphen die Größen

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma} dx_\mu$$

einen kovarianten Vierervektor, und zwar (wegen der willkürlichen Wählbarkeit der dx_μ) einen beliebig wählbaren Vierervektor. Indem wir ihn in unseren Ausdruck einführen, erhalten wir

$$ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_\sigma d\xi_\tau.$$

Da dies bei beliebiger Wahl des Vektors $d\xi_\sigma$ ein Skalar ist und $g^{\sigma\tau}$ nach seiner Definition in den Indizes σ und τ symmetrisch ist, folgt aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen, daß $g^{\sigma\tau}$ ein kontravarianter Tensor ist. Aus (16) folgt noch, daß auch $\delta_\mu^{\ \nu}$ ein Tensor ist, den wir den gemischten Fundamentaltensor nennen können.

2.1.4 Kommentar

Dieser Abschnitt enthält wesentliche Bezüge zur Matrizenrechnung. $\delta_\mu^{\ \nu} \equiv \mathbb{I}$ ist das Kroneckersymbol bzw. die Einheitsmatrix.

$$(16*) \qquad g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^{\ \nu} \to GG^{-1} = \mathbb{I} \tag{2.1.13}$$

zeigt, dass die oberen Indizes die Inverse zu den unteren Indizes bezeichnen. Das hat mit Ko- und Kontravarianz nach meiner Meinung nichts zu tun, es sei denn der eine Tensor wäre kovariant und der andere kontravariant. Die Gleichung

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} dx_\mu dx_\nu \tag{2.1.14}$$

ist unter dem Aspekt der Symmetrie der Gundamentaltensoren, wie sie Einstein in (15) und (15a) zeigt nicht vollständig. Der letze Ausdruck ist richtig geschrieben

$$dx_\mu g^\mu_\nu dx^\nu \longrightarrow dx_\mu \delta^\mu_\sigma g^\sigma_\tau \delta^\tau_\nu dx^\nu, \tag{2.1.15}$$

worin immer benachbarte Indizes paarweise gleich sind und sich bei Multiplikation gegenseitig aufheben. Nun lassen sich die δ^μ_σ und δ^τ_ν symmetrisch aufspalten, wobei es nicht unbedingt g-Matrizen sein müssen, sondern allgemeine Transformationsmatrizen (-tensoren)

$$\delta^\mu_\sigma = a^\mu_\kappa a^\kappa_\sigma, \qquad \delta^\tau_\nu = a^\tau_\lambda a^\lambda_\nu, \tag{2.1.16}$$

$$dx_\mu a^\mu_\kappa a^\kappa_\sigma g^\sigma_\tau a^\tau_\lambda a^\lambda_\nu dx^\nu = (dx_\mu a^\mu_\kappa)(a^\kappa_\sigma g^\sigma_\tau a^\tau_\lambda)\left(a^\lambda_\nu dx^\nu\right) = dx'_\kappa g'^\kappa_\lambda dx'^\lambda. \tag{2.1.17}$$

So kommte man auf die Fragestellung von Christoffel [1] mit

$$dx'_\kappa = dx_\mu a^\mu_\kappa, \qquad g'^\kappa_\lambda = a^\kappa_\sigma g^\sigma_\tau a^\tau_\lambda, \qquad dx'^\lambda = a^\lambda_\nu dx^\nu. \tag{2.1.18}$$

In Matrixschreibweise ist das

$$d\mathbf{x}'^T = d\mathbf{x}^T A^T, \qquad G' = \left(A^T\right)^{-1} G A^{-1}, \qquad d\mathbf{x}' = A d\mathbf{x} \tag{2.1.19}$$

oder als Invarianzgleichung

$$d\mathbf{x}'^T G' d\mathbf{x}' = d\mathbf{x}^T \underline{A^T \left(A^T\right)^{-1}} G \underline{A^{-1} A} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \mathbb{I} G \mathbb{I} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T G d\mathbf{x}. \tag{2.1.20}$$

Die kovariante Transformation ist identisch mit

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma} dx_\mu \equiv d\xi^T = d\mathbf{x}'^T = d\mathbf{x}^T G^T. \tag{2.1.21}$$

und wird zu

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \to ds^2 = g^{\sigma\tau} d\xi_\sigma d\xi_\tau, \tag{2.1.22}$$

$$ds^2 = d\mathbf{x}^T G d\mathbf{x} \to ds^2 = d\xi^T G' d\xi. \tag{2.1.23}$$

Die Tensorgleichungen sind wegen der Zugehörigkeit der Indizes anders zu ordnen

$$g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} g^{\sigma\tau} dx_\mu dx_\nu \to dx_\mu g_{\mu\sigma} g^{\sigma\tau} g_{\tau\nu} dx^\nu, \tag{2.1.24}$$

$$ds^2 = d\mathbf{x}^T G^T G^{-1} G d\mathbf{x}. \tag{2.1.25}$$

Das bedeutet aber nur $G^T = G$. Besser ist die Darstellung mit einer beliebigen Transformation

$$d\mathbf{x}^T \Lambda^T G \Lambda d\mathbf{x}. \tag{2.1.26}$$

2.1.5 Zitat

Determinante des Fundamentaltensors.
Nach dem Multiplikationssatz der Determinanten ist

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}||g^{\alpha\nu}|.$$

Andererseits ist

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^{\ \nu}| = 1.$$

Also folgt

$$(17) \qquad |g_{\mu\nu}||g^{\mu\nu}| = 1.$$

2.1.6 Kommentar

Die beiden Tensoren $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$sind zueinander invers.

2.1.7 Zitat

Invariante des Volumens.
Wir suchen zuerst das Transformationsgesetz der Determinante $g = |g_{\mu\nu}|$. Gemäß (11) ist

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|.$$

Hieraus folgt durch zweimalige Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinanten

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right|^2 g,$$

oder

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \sqrt{g}.$$

Andererseits ist das Gesetz der Transformation des Volumelementes

$$d\tau' = \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

nach dem bekannten JAKOBIschen Satze

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau.$$

Durch Multiplikation der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$(18) \qquad \sqrt{g'}d\tau' = \sqrt{g}d\tau.$$

Statt $\sqrt{g}$ wird im folgenden die Größe $\sqrt{-g}$ eingeführt, welche wegen des hyperbolischen Charakters des zeiträumlichen Kontinuums stets einen reellen Wert hat. Die Invariante $\sqrt{-g}d\tau$ ist gleich der Größe des im „örtlichen Bezugssystem“ mit starren Maßstäben und Uhren im Sinne der speziellen Relativitätstheorie gemessenen vierdimensionalen Volumelementes.

2.1.8 Kommentar

2.1.9 Zitat

Bemerkung über den Charakter des raumzeitlichen Kontinuums.

Unsere Voraussetzung, daß im unendlich Kleinen stets die spezielle Relativitätstheorie gelte, bringt es mit sich,

daß sich ds^2 immer gemäß (1) durch die reellen Größen $dX_1....dX_4$ ausdrücken läßt. Nennen wir $d\tau_0$ das „natürliche“ Volumelement $dX_1dX_2dX_3dX_4$, so ist also

$$(18a) \qquad d\tau_0 = \sqrt{-g}d\tau.$$

Soll an einer Stelle des vierdimensionalen Kontinuums $\sqrt{-g}$ verschwinden, so bedeutet dies, daß hier einem endlichen Koordinatenvolumen ein unendlich kleines „natürliches“ Volumen entspreche. Dies möge nirgends der Fall sein. Dann kann g sein Vorzeichen nicht ändern; wir werden im Sinne der speziellen Relativitätstheorie annehmen, daß g stets einen endlichen negativen Wert habe. Es ist dies eine Hypothese über die physikalische Natur des betrachteten Kontinuums und gleichzeitig eine Festsetzung über die Koordinatenwahl.

Ist aber $-g$ stets positiv und endlich, so liegt es nahe, die Koordinatenwahl a posteriori so zu treffen, daß diese Größe gleich 1 wird. Wir werden später sehen, daß durch eine solche Beschränkung der Koordinatenwahl eine bedeutende Vereinfachung der Naturgesetze erzielt werden kann. An Stelle von (18) tritt dann einfach

$$d\tau' = d\tau,$$

woraus mit Rücksicht auf JAKOBIs Satz folgt

$$(19) \qquad \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| = 1.$$

Bei dieser Koordinatenwahl sind also nur Substitutionen der Koordinaten von der Determinante 1 zulässig.

Es wäre aber irrtümlich, zu glauben, daß dieser Schritt einen partiellen Verzicht auf das allgemeine Relativitätspostulat bedeute. Wir fragen nicht: „Wie heißen die Natur- gesetze, welche gegenüber allen Transformationen von der Determinante 1 kovariant sind?“ Sondern wir fragen: „Wie heißen dieallgemein kovarianten Naturgesetze?“ Erst nachdem wir diese aufgestellt haben, vereinfachen wir ihren Ausdruck durch eine besondere Wahl des Bezugssystems.

2.1.10 Kommentar

(1) lautet

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{2.1.27}$$

mit dem Linienelement eines unendlich benachbarten Punkten des vierdimensionalen Raumes, und wird durch Umstellen

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = dX_4^2 - ds^2 = dX_4^2 \left(1 - \frac{ds^2}{dX_4^2}\right). \tag{2.1.28}$$

Soll das vielleicht den LORENTZ-Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ abbilden? $d\tau' = d\tau$ ist ein von Transformationen unabhängiges Volumen, und was ist dann mit der Längenkontraktion der LORENTZ-Transformation? Die Determinante *Eins* nach (19) wird neben der Lorentz-Transformation auch von der GALILEI-Transformation erfüllt.

2.1.11 Zitat

Bildung neuer Tensoren vermittelst des Fundamentaltensors.

Durch innere, äußere und gemischte Multiplikation eines Tensors mit dem Fundamentaltensor entstehen Tensoren anderen Charakters und Ranges.

Beispiele:

$$A^\mu = g^{\mu\sigma} A_\sigma,$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Besonders sei auf folgende Bildungen hingewiesen:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$
$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

(„Ergänzung“ des kovarianten bzw. kontravarianten Tensors) und

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Wir nennen $B_{\mu\nu}$ den zu $A_{\mu\nu}$ gehörigen reduzierten Tensor. Analog

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Es sei bemerkt, daß $g^{\mu\nu}$ nichts anderes ist als die Ergänzung von $g_{\mu\nu}$. Denn man hat

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_\alpha^{\ \nu} = g^{\mu\nu}.$$

2.1.12 Kommentar

Der letzte Satz erklärt klar

$$Ergänzung \equiv Inversersion.$$

War der Begriff 1916 wirklich noch nicht in Gebrauch?

Die erste Gleichung ist eine Transformation, geschuldet der unklaren Definition von ko- und kontravarianten Tensoren.

Für das zweite Beispiel gibt es wahrscheinlich keine mathematisch-physikalische Erklärung.

Die folgenden Gleichungen sind quadratische Formen im Sinne der vorstehenden Kommentare

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta} \longrightarrow A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} A_{\alpha\beta} g^{\nu\beta}, \tag{2.1.29}$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta} \longrightarrow A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} A^{\alpha\beta} g_{\nu\beta}, \tag{2.1.30}$$

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \longrightarrow B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} A, \tag{2.1.31}$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \longrightarrow B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} A. \tag{2.1.32}$$

Literatur

[1] Christoffel, E. B.: Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* Bd. 70 (1869), S. 46–70

[2] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[3] Minkowski, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember