Über die Maxwell-Einsteinschen Feldgleichungen Teil I

Wolfgang Lange

24. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die spezielle Relativitätstheorie von Albert Einstein [2] fußt auf der Lorentz-Transformation, die Hendrik Antoon Lorentz in [4, 5] entwickelt hatte. Zweifel an der Richtigkeit der Lorentz-Transformation führten mich zu grundlegenden Überlegungen an Hand der Quellen. Dabei störte mich die von Lorentz unkommentierte Einführung der kontravarianten Galilei-Transformation in [5] § 19, die zu der Längenkontraktion und der Zeitdilatation führte.

Nach einer längeren Einarbeitung in die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein [3] erschliessen sich die Begriffe *kovariant* und *kontravariant* sowie *kontragrediente* Transformation, auf die die §§ 19 und 31 von Lorentz Bezug nehmen, ohne dort so erwähnt zu werden.

Einstein verwendete für seine Arbeit die Abhandlung von Hermann Minkowski [6], der dort einen Vorschlag von Henri Poincaré [7] erwähnte. Die von Poincaré angegebene Gleichung liefert für die Wellenausbreitung des Lichtes die klassische Theorie der Schallwellen. Es kann sich deshalb bei Lorentz ein Fehler eingeschlichen haben.

Vor der Analyse von Einsteins ART werden einige wichtige Regeln von Minkowski vorgestellt. Danach wird § 20 des Einsteinschen Artikels von 1916 wörtlich wiedergegeben, um anschließend lediglich die Tensorgleichungen in Matrizengleichungen umzuformen und im Detail nachzurechnen. Es muss sich dabei die Übereinstimmung mit oder der Unterschied zur klassischen Elektrotechnik herausstellen.

2 Etwas Mathematik

2.1 Definitionen

Es seien der kovariante Zeilenvektor und der kontravariante Spaltenvektor der partiellen Ableitungsoperatoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T, \tag{2.1.1}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{c\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.1.2}$$

Gegenüber der Indexzählweise bei Minkowski wird hier weitestgehend die natürliche Bedeutung der Raum-Zeit-Komponenten ohne Index verwendet. Sie trennt die physikalische Bedeutung von Raum und Zeit. Die partielle Ableitung einer 4x4-Matrix M ist prinzipiell eine Transformation bzw. das innere Produkt eine Matix mit einem Vektor

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \cdot M^T\right]^T = \left\{M \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\}, \tag{2.1.3}$$

worin die geschweifte Klammer die rückwärtige Notierung sein soll. Die mathematisch inkorrekte Schreibweise des nachgestellten Operators ist als *“auf M angewendete Differentiation”* anzusehen.

Die Kuglegleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 = \tau^2 \tag{2.1.4}$$

schreiben wir in der Form

$$\begin{pmatrix} x & y & z & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \tau \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T G \mathbf{x} \tag{2.1.5}$$

und den d'Alembertoperator der allgemeinen Wellengleichung als

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T G \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = 0. \tag{2.1.7}$$

Darin ist G der bei Einstein zu Grunde gelegte Fundamentaltensor. Die letzte Gleichung erlaubt uns, eine kontravariante Transformation als

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \left\{G \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\} \tag{2.1.8}$$

zu schreiben. Das erspart viele Transponierungen. In der Folge werden auch die Basisvektoren

$$\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{pmatrix} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

verwendet. Damit kommt man zu einem Satz von Vierervektoren und Vieroperatoren.

2.2 Der asymmetrische Sechser-Vektor

In den Relativitätstheorien spielen sogenannte Sechser-Vektoren eine Rolle, deren äquivalenter Aufbau eine asymmetrische Vierer-Matrix ist. In der Vereinfachung ist diese Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} & 0 \end{array} \right), \tag{2.2.1}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y & x \\ Z & 0 & -X & y \\ -Y & X & 0 & z \\ -x & -y & -z & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -x & -y & -z \end{pmatrix} & 0 \end{array} \right). \tag{2.2.2}$$

In dem dualen Paar wurden die Buchstaben ausgetausch

$$N = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & X \\ -z & 0 & x & Y \\ y & -x & 0 & Z \\ -X & -Y & -Z & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -X & -Y & -Z \end{pmatrix} & 0 \end{array} \right), \tag{2.2.3}$$

$$N^T = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & -X \\ z & 0 & -x & -Y \\ -y & x & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -X & -Y & -Z \end{pmatrix} & 0 \end{array} \right). \tag{2.2.4}$$

Die Determinate von M entwickeln wir nach Laplace nach der rechten Spalte durch Bildung der Unterdeterminanten

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} & 0 \end{array} \right), \tag{2.2.5}$$

$$|M| = - \begin{vmatrix} & & & -x \\ -Z & 0 & X & \\ Y & -X & 0 & \\ x & y & z & \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & \\ & & & -y \\ Y & -X & 0 & \\ x & y & z & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & \\ -Z & 0 & X & \\ & & & -z \\ x & y & z & \end{pmatrix}, \tag{2.2.6}$$

$$|M| = x \begin{vmatrix} -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & Z & -Y \\ Y & -X & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ x & y & z \end{vmatrix}, \tag{2.2.7}$$

$$|M| = x\left(zXZ + yXY + xX^2\right) - y\left(-yY^2 - zYZ - xXY\right) + z\left(xXZ + yYZ + zZ^2\right), \tag{2.2.8}$$

$$|M| = x^2X^2 + y^2Y^2 + z^2Z^2 + 2xXzZ + 2xXyY + 2yYzZ, \tag{2.2.9}$$

$$|M| = (xX + yY + zZ)^2 = \left[\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right]^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{X})^2. \tag{2.2.10}$$

Wegen der Symmetrie gilt dasselbe auch für den beliebigen Tausch der beiden Vektoren, also auch für

$$|N| = |M|. \tag{2.2.11}$$

Nach Bocher [1] [54.] bildet der Ausdruck

$$\sum_1^n A_{ij} u_i u_j \tag{2.2.12}$$

die negative Determinante, wie für den vereinfachten Fall hier bewiesen wurde. Dann ist allgemein bei den asymmetrischen elektromagnetischen Feldmatrizen

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_z & -a_y & u_x \\ -a_z & 0 & a_x & u_y \\ a_y & -a_x & 0 & u_z \\ -u_x & -u_y & -u_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y^2 & a_y a_z \\ a_z a_x & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \tag{2.2.13}$$

d.g die Diskriminante der quadratischen Form ist

$$\begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y^2 & a_y a_z \\ a_z a_x & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}, \tag{2.2.14}$$

also

$$|A| = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \left(\mathfrak{a}^T \cdot \mathfrak{u}\right)^2. \tag{2.2.15}$$

Die $4x4$-Matrizen werden zu Produkten von Dreier-Vektoren. Die sogenannte Zeitkomponente verschwindet, weil sie als zusätzliche Scheindimension aus den homogenen Koordinaten entstanden ist. Das Universum bleibt dreidimensional.

Eine besondere Rolle spielt der Fundamentaltensor (Minkowski-Tensor)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2.16}$$

zur Beschreibung der Kugel

$$\begin{pmatrix} x & y & z & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ r \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0. \tag{2.2.17}$$

Die rechtsseitige Multiplikation einer beliebigen Matrix A mit dem Fundamentaltensor dreht das Vorzeichen der rechten Spalte, z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}, \qquad M \cdot G = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & x \\ -Z & 0 & X & y \\ Y & -X & 0 & z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.18}$$

Die linksseitige Multiplikation dreht das Vorzeichen der unteren Zeile, z.B.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}, \qquad G \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y & -x \\ -Z & 0 & X & -y \\ Y & -X & 0 & -z \\ -x & -y & -z & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.19}$$

Beidseitige Multiplikatien dreht dann die Vorzeichen der unteren Zeile und der rechten Spalte.

Von Bedeutung ist das skalare Produkt

$$P = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} X & Y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \tag{2.2.20}$$

denn es ist

$$N^T \cdot G \cdot M = M^T \cdot G \cdot N = N \cdot G \cdot M^T = M \cdot G \cdot N^T = G \cdot P = P \cdot G. \tag{2.2.21}$$

Die inversen Mattrizen ergeben sich zu

$$M^{-1} = G^T \frac{N^T}{P} G, \qquad N^{-1} = G^T \frac{M^T}{P} G, \tag{2.2.22}$$

wobei

$$G = G^{-1} = G^T = \left(G^{-1}\right)^T = \left(G^T\right)^{-1} \tag{2.2.23}$$

zu berücksichtigen sind. Damit findet man mittels links- und rechtsseitiger Multiplikation mit den Inversen

$$\left(G^T\right)^{-1} M^{-1} G^{-1} = \left(G^T\right)^{-1} G^T \frac{N^T}{P} G G^{-1} = \frac{N^T}{P}, \tag{2.2.24}$$

$$\left(G^T\right)^{-1} N^{-1} G^{-1} = \left(G^T\right)^{-1} G^T \frac{M^T}{P} G G^{-1} = \frac{M^T}{P}. \tag{2.2.25}$$

Es ist anzunehmen, dass Minkowski und und vielleicht auch Einstein diese Tatsachen kannten.

References

[1] Bocher, M.: *Einführung in die höhere Algebra.* Teubner, 1910

[2] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 891–921

[3] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[4] Lorentz, H.A.: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvmants.* E. J. BRILL, 1892

[5] Lorentz, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005)

[6] Minkowski, Hermann: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. In: *Nachr.d. Kgl.Ges. d. Wiss.* (1907), Dezember

[7] Poincaré, H.: Sur la dynamique de l'èlectron. In: *Rend. d. Circolo matem. di Palermo* 21 (1906), S. 129–176