Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorien - Vektorräume -

Wolfgang Lange

25. September 2014

1 Vektorräume

1.1 Allgemeine Koordinaten

Allgemeine Koordinaten sind Orientierungswerte in beliebigen Systemen. In fast allen Sprachen der Welt gibt es Ordnungsbegriffe, z.B. wer, was, wo, wann mit einfachen Antworten vorn-hinten, rechts-links, oben unten, vorher-nachher oder präziser vorgestern, Datum und Uhrzeit. Alle diese Begriffe sind den Koordinaten zuzuschreiben. Selbst ein Fahrplan enthält Orts- und Zeitkoordinaten.

Der von uns begriffene EUKLIDische Raum besitzt drei Komponenten, die je nach dem verwendeten Koordinatensystem kartesisch mit x, y, z oder in Polarkoordinaten mit r, φ, θ bezeichnet werden. Die praktische Darstellungsform des 3D-Raumes auf einem Blatt Papier verlangt ein Abstraktionsvermögen. So können dreidimensionale Körper beispielsweise perspektivisch oder mit drei verschiedenen Ansichten und Schnitten präzise dargestellt werden. Zur Erfassung einer besonderen Situation ist wie bei den Fragewörtern ein subjektiver Nullpunkt festzulegen, d.h. die Koordinaten sind nur zusammen mit einem Koordinatensystem aussagefähig. Ein eindimensionales Koordinatensystem ist z.B. ein Lineal mit einer Skala, das zur Verwendung leicht verschoben und gedreht werden kann. Auf einem Blatt Papier entsteht ein zweidimensionales Koordinatensystem und für ein dreidimensionales System benötigt man eine räumliche Anordnung, die verschoben und gedreht werden kann.

1.2 Homogen Koordinaten

Ein Punkt in der Ebene verfügt über zwei Koordinaten. BOCHER [1] schreibt dazu:

> "Obwohl bereits zwei Größen ausreichen, um die Lage eines Punktes in der Ebene zu bestimmen, ist es doch häufig zweckmäßig, drei zu benutzen, *wobei es dann nicht mehr auf die Werte dieser Größen selbst, sondern nur auf die Verhältnisse ankommt.*
>
> Wir erklären also drei Größen x, y, t durch die Gleichungen
>
> $$\frac{x}{t} = X, \qquad \frac{y}{t} = Y,$$
>
> wobei X und Y die kartesischen Koordinaten eines Punktes bedeuten.
>
> Das System $(2 : 3 : 5)$ soll den Punkt mit der Abszisse $\frac{2}{3}$ und der Ordinate $\frac{3}{5}$ darstellen. Jedes Wertesystem, dessen drei Zahlen zu $(2, 3, 5)$ proportional sind, stellt denselben Punkt dar.
>
> Die drei Zahlen eines solchen Wertesystems heißen die *homogenen* Koordinaten des fraglichen Punktes."

Die Form $(x : y : t)$ enthält das Verhältnis $\frac{y}{x}$ als Richtungsgröße. Für beliebige t liegen die Punkte auf einer Ggeraden und bei $t = 0$ im *unendlich fernen Punkt* der Geraden.

> "Die Gleichung
> $$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$
> geht bei der Einführung homogener Koordinaten über in
> $$A\frac{x^2}{t^2} + B\frac{xy}{t^2} + C\frac{x}{t^2} + D\frac{x}{t} + E\frac{y}{t} + F = 0$$
> oder
> $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dxt + Eyt + Ft^2 = 0.$$
> das ist eine homogene Gleichung zweiten Grades. Offenbar kann man überhaupt jede algebraische gleichung zwischen den Koordinaten X, Y durch Einführung der homogenen Koordinaten $(x : y : t)$ homogen machen, wobei der Grad der Gleichung erhalten bleibt. Dieser Tatsache verdanken die Koordinaten $(x : y : t)$ die Bezeichnung *homogen*; auf dieser Eigenschaft beruht auch einer ihrer wesentlichen Vorzüge."

Die homogen Gleichung zweiten Grades in x, y, t stellt einen Kegelschnitt dar. Es ist üblich, die gemischten Glieder doppelt zu zählen, wodurch aus den sechs Summanden $3 * 3 = 9$ Summanden entstehen.

Weiter heißt es:

> "Im Raume von drei Dimensionen wollen wir den Punkt mit den kartesischen Koordinaten (X, Y, Z) durch vier homogen Koordinaten (x, y, z, t) folgendermaßen darstellen:
> $$\frac{x}{t} = X, \qquad \frac{y}{t} = Y, \qquad \frac{z}{t} = Z.$$
> Das System $(x : y : z : 0)$ stellt dann den unendlich fernen Punkt in der Richtung dar, welche (sofern nicht gerade $x^2 + y^2 + z^2 = 0$) durch die Richtungskosinus
> $$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
> bestimmt ist. Das System $(0 : 0 : 0 : 0)$ bleibt ausgeschlossen; $t = 0$ heißt die Gleichung *der unendlich fernen Ebene*."

Trotz der drei homogenen Koordinaten in der Ebene und der vier homogenen Koordinaten im Raum bleiben Ebene und raum zwei- bzw. dreidimensional. Der Parameter t ist *kein Bestandteil* des Raumes.

1.3 Koordinaten und Basisvektoren

Der vierdimensionale Vektor aus dem reellen Vektorraum V besteht aus vier einzelnen Größen aus der Menge aller reeller Zahlen

Der Begriff *Vektor* wurde von HAMILTON eingeführt. Ein früher deutscher Begriff war *Zeiger*, weil er von irgeneinem Koordinatenursprung nach einem Punkt in dem zugehörigen Koordinatensystem zeigt. Der Begriff Zeiger wurde in der komplexen Wechselstromlehre der Elektrotechnik übernommen. Vor diesen Wandlungen in der Geometrie und in der Analysis verwendete man die kartesische Komponentenform, die ohne Richtungssymbol auskam. Ausgehend von dem Symbol $i = \sqrt{-1}$ in der komplexen GAUSSschen Zahlenebene hat HAMILTON mit seinen *Quaternionen* einen dreidimensionalen komplexen Raum mit den komplexen Größen i, j, k in drei unterschiedlichen Ebenen eingeführt, die dann später die EUKLIDischen Basisvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ wurden. Im mehrdimensionalen Raum werden die Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}^j$ mit der Formel [7] (Transformation einer Matrix mittels einer zweiten Matrix, also ein Matrixprodukt)

$$\mathbf{e}_i \left(\mathbf{e}^j\right) = \delta_i^j \equiv \mathbb{I} \tag{1.1}$$

unterschieden. Das bedeutet, dass die dualen Basisvektoren der beiden zueinander dualen Vektorräume in der Gestalt von zueinander invertierten Matrizen AA^{-1} oder $A^{-1}A$ geschrieben werden müssen.

$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_4)$ sei eine Basis im vierdimensionalen Vektorraum V der Raum-Zeit. Losgelöst von der Darstellung im kartesischen Koordinatensystem ist die Standardbasis

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

ein Zeilenvektor mit vier Spaltenvektoren. Eine zweite Basis ist

$$\mathbf{e}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \\ \mathbf{e}^3 \\ \mathbf{e}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

und das dyadische Produkt wird

$$\mathbf{e}^j \circ \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Mit den kontravarianten Koordinaten x^i des Vektors $\mathbf{x}$ erhält man das skalare Produkt

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i x^i \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 x^1 + \mathbf{e}_2 x^2 + \mathbf{e}_3 x^3 + \mathbf{e}_4 x^4, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x^4 = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Wegen ihrer Struktur verschwindet die Standardbasis in der Rechnung. Die Standardbasis lässt sich auch als Matrix auffassen. Man nennt die Vektoren mit unteren Indizes kovariant und mit oberen kontravariant. Neben dieser Darstellung gibt es eine zweite Form durch Tausch der Indizes für denselben Vektor

$$\mathbf{x} = y_j \mathbf{e}^j. \tag{1.9}$$

Im einfachsten Fall sind die beiden Ausdrücke nur zueinander transponiert, Basisvektoren und Komponenten können auch auf andere Weise zusammenhängen. Orthogonale Basisvektoren stehen senkrecht aufeinander. Dazu muss das skalare Produkt zwischen zwei Basisvektoren Null werden, z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{1.10}$$

Man kann jedoch auch neue Basisvektoren durch Multiplikation und Addition gewinnen, z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

und das Produkt geht über in

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0. \tag{1.12}$$

Dieses Vektorpaar ist nicht orthogonal zueinander und widerspricht z.B. in der GALILEI-Transformation der Rechtwinkligkeit zwischen Raum- und Zeitachsen und widerlegt das Zitat von HAWKING über die Zeit.

Wegen der nicht ganz übersichtlichen und nicht eindeutigen Darstellungsweise ziehen sich reine Mathematiker wahrscheinlich gerne auf die Mengen {...} von Koordinaten und Basen zurück und verwenden die Tensordarstellung. Ursprünglich wurden die Transformationen mit Summen ausgeführt. Erst mit der Erfindung der Matrizenrechnung wurde die Berechnung klar und übersichtlich. Die von den Relativisten bevorzugte Tensorrechnung bewirkt dasselbe, ist aber nicht ganz so klar strukturiert, weshalb man beide Methoden anwendet (s.a. HÜBNER [4]). Ohne Matrizen sind die Tensorkürzel wertlos.

1.4 Transformationen

Transformationen sind prinzipiell die Umwandlungen von Zahlenmengen in ein anderes Koordinatensystem, wobei oft die Basisvektoren weggelassen werden. Sehr oft sin das lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & a_{11}x & + & a_{12}y \\ y' & = & a_{21}y & + & a_{22}y \end{array} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

die auch transponiert geschrieben werden können

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Dafür schreibt man kurz

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T A^T, \tag{1.15}$$

und die Umkehrungen

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}', \qquad \mathbf{x}^T = \mathbf{x}'^T \left(A^{-1}\right)^T. \tag{1.16}$$

Die Begriffe kontra- und kovariant lassen sich in der Kurzform der Matrizenrechnung klar definieren. Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}. \tag{1.17}$$

Wir fügen zwischen den Faktoren die Einheitsmatrix $\mathbb{I} = A^{-1}A$ ein

$$p = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^{-1} A\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^T A^{-1}\right)(A\mathbf{y}) \tag{1.18}$$

und erhalten zwei Transformationen eines Spaltenvektors

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \tag{1.19}$$

und eines Zeilenvektors

$$\mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T A^{-1}. \tag{1.20}$$

Die erste Transformation ist die kontravariante, und die zweite Form wird transponiert in

$$\mathbf{x}' = \left(A^{-1}\right)^T \mathbf{x} \tag{1.21}$$

und kovariant oder kontragredient zur ersten Transformation genannt, denn beide Transformationen benutzen jetzt Spaltenvektoren, jedoch einmal die Matrix A und einmal die kontragrediente Matrix $\left(A^{-1}\right)^T$. Wir sehen hierbei

$$\mathbf{x}'^T \cdot \mathbf{y}' = \mathbf{x}^T A^{-1} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \text{invariant.} \tag{1.22}$$

Das Besondere daran ist, dass es über A nur eine Aussage gibt, die Matrix muss vom Grad der Vektoren und invertierbar sein. Ihr Inhalt ist im wahrsten Sinne des Wortes Schnuppe, und so kann man die GALILEI-Transformation mit der LORENTZ-Transformation vergleichen und findet bei diesen Invarianzen keinen Unterschied im Skalar, jedoch erhebliche Abweichungen in den Teiltransformationen.

1.5 Basiswechsel im Vektorraum

In der linearen Algebra gibt es den Begriff eines Basiswechsels, der mit dem Verhältnis der Basisvektoren (Richtungen im mehrdimensionalen Raum) und den dazugehörenden Vektorkomponenten zusammenhängt. Nach SMIRNOW [6] sei ein Vektor $\mathfrak{x}$ mit zwei unterschiedlichen Basen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bestimmt durch

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{a}^{(1)} + x_2\mathfrak{a}^{(2)} + ... + x_n\mathfrak{a}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathfrak{a}^{(i)} \equiv \mathbf{x}^T\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^{(1)} \\ \mathfrak{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}^{(n)} \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

und

$$\mathfrak{x} = y_1\mathfrak{b}^{(1)} + y_2\mathfrak{b}^{(2)} + ... + y_n\mathfrak{b}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathfrak{b}^{(i)} \equiv \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{b}^{(1)} \\ \mathfrak{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathfrak{b}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Die Elemente der Spaltenmatrizen sind Zeilenmatrizen mit jeweils n Elementen, sodass jene selbst zu nxn-Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden. Zwischen den Basisvektoren gelte die Beziehung einer linearen Transformation

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{b}^{(1)} \\ \mathfrak{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathfrak{b}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{a}^{(1)} \\ \mathfrak{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{b} = T\mathbf{a}. \tag{1.25}$$

T ist dabei die Transformationsmatrix für die Basen oder auch die Basiswechselmatrix. Dann ist

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathfrak{b}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(t_{i1}\mathfrak{a}^{(1)} + t_{i2}\mathfrak{a}^{(2)} + ... + t_{in}\mathfrak{a}^{(n)}\right) = x_1\mathfrak{a}^{(1)} + x_2\mathfrak{a}^{(2)} + ... + x_n\mathfrak{a}^{(n)} \tag{1.26}$$

und mit Koeffizientenvergleich für die einzelnen Summanden mit $\mathfrak{a}^{(k)}$

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i t_{ik}\mathfrak{a}^{(k)} = x_k\mathfrak{a}^{(k)} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i t_{ik} = x_k \tag{1.27}$$

oder als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & ... & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & ... & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & ... & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x} = T^T\mathbf{y}. \tag{1.28}$$

Die beiden Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \dots & t_{n1} \\ t_{12} & t_{22} & \dots & t_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

sind zueinander transponiert. Da aber die Basen in der Richtung $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$ transformiert wurden, interessiert

$$\mathbf{y} = \left(T^T\right)^{-1} \mathbf{x}. \tag{1.30}$$

Der invariante Vektor $\mathfrak{x}$ kann danach beschrieben werden durch

$$\mathfrak{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{a} = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{x}^T\,(T)^{-1}\,T\mathbf{a} = \mathbf{x}^T\mathbb{I}\mathbf{a}. \tag{1.31}$$

Es kommt nur auf das Paar $(T)^{-1}\,T = \mathbb{I}$ an, und man kann jede beliebige invertierbare Basiswechselmatrix T verwenden, z.B. die Galielei-Matrix oder die Lorentz-Matrix. Transformiert man nun die Basisvektoren $\mathbf{a}$ eines Vektors $\mathfrak{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{a}$ mit der Matrix T gemäß $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$, dann transformieren sich die neuen Vektoren

$$\mathbf{y} = \left(T^T\right)^{-1} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{y}' = \left(T^T\right)^{-1} \mathbf{x}' \tag{1.32}$$

gemäß

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{1.33}$$

zu

$$\mathbf{y}' = \left(T^T\right)^{-1} \mathbf{x}' = \left(T^T\right)^{-1} A\mathbf{x} = \left(T^T\right)^{-1} AT^T\mathbf{y} = UAU^{-1}\mathbf{y}. \tag{1.34}$$

Die beiden Transformationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}' = UAU^{-1}\mathbf{y}$ heißen ähnlich oder äquivalent bezüglich dem Basiswechsel mit der Matrix T. Die Matrix $U = \left(T^T\right)^{-1}$ ist kontragredient zu T. Das Produkt $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{x}^T\,(T)^{-1}\,T\mathbf{a}$ bedeutet zwei kontragrediente Transformationen bestehend aus einer *kontravarianten* Transformation $\mathbf{b} = T\mathbf{a}$ und einer dazu *kovarianten* Transformation $\mathbf{y} = \left(T^T\right)^{-1}\mathbf{x}$. Gleichzeitig erkennt man auch die Unterschiede der Vektoren $\mathbf{y}^T \neq \mathbf{x}^T$ und $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$. Bezogen auf eine Zahlenwertgleichung ist nur $ab = cd$ mit $a, b \neq c, d$ gefordert. *Ähnlich* und *äquivalent* bedeuten nicht *gleich*, denn nur die beiden Produkte sollen *invariant* sein.

In dem vorliegenden Fall entfällt die Matrix A, während T und T^T die beiden transponierten Matrizen sind.

Diesen Sachverhalt der Invarianz eines Skalarproduktes durch Einfügen einer Einheitsmatrix $\mathbb{I} = (T)^{-1}\,T$ verwendet auch Lorentz bei der Entwicklung der Lorentz-Transformation [5] § 19 mit der kontravarianten Galilei-Transformation der Geschwindigkeiten und der kovarianten Transformation der partiellen Ableitungen sowie Einstein bei der Tensorrechnung in der allgemeinen Relativitätstheorie [2, 3]. Lorentz umschreibt das Verfahren mit den nichtssagenden Wortem "Es ist nun, in Anwendung auf eine beliebige Function, ..." und verwendet nur den kovarianten Anteil, während er den kontravarianten Anteil in umfangreichen Rechnungen umgeht.

References

[1] Bocher, M.: *Einführung in die höhere Algebra.* Teubner, 1910

[2] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik* 49 (1916), S. 769–822

[3] Einstein, A.: *Grundzüge der Relativitätstheorie.* Springer-Verlag, 1922. – 7. Auflage 2009

[4] Hübner, Ralph: Vom Basiswechsel zum Urknall - Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie. In: *Internet* (2009)

[5] Lorentz, H.A.: *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* E. J. BRILL, 1895(2005)

[6] Smirnow, W.I.: *Lehrbuch der höheren Mathematik III/1*. Bd. III/1. 14. Auflage. Verlag Harry Deutsch, 1995

[7] Timmermann, W.: Ko- versus -kontravariante Vektoren. In: *Internet* (2011)